

*Vuko, VUKČEVIĆ, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
Andreja, WERNER, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
Nastia, DEGIULI, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb*

SPH SIMULACIJA POISEULLEOVOG STRUJANJA PRI NISKIM REYNOLDSOVIM BROJEVIMA

Sažetak

U ovom radu je ukratko opisana metoda hidrodinamike izgladenih čestica (engl. "Smoothed particle hydrodynamics") ili SPH metoda za simulaciju problema dinamike fluida koja se zasniva na sustavu čestica. SPH metoda aproksimira kontinuum s konačnim brojem čestica koje nose fizikalna svojstva te ujedno služe kao čvorovi u kojima se aproksimiraju funkcije polja. Prikazana je integralna aproksimacija funkcija polja i njenih derivacija pomoću jezgrenih funkcija, kao i aproksimacija česticama. Da bi osigurale konzistentnost određenog reda, jezgrene funkcije moraju zadovoljiti uvjete koji su u radu prikazani. Razvijen je računalni kod za simulaciju Poiseuilleovog strujanja. Pokazano je da se dobiveni rezultati vrlo dobro slažu s analitičkim rješenjem. Kao i svaka numerička metoda, SPH metoda također ima svoje prednosti i nedostatke koji su primijećeni kroz teorijska razmatranja i kroz praksu, te su ovdje ukratko navedeni.

Ključne riječi: hidrodinamika izgladenih čestica, jezgrene funkcije, Poiseuilleovo strujanje

SPH SIMULATION OF POISEUILLE FLOW AT LOW REYNOLDS NUMBERS

Summary

This paper briefly describes the smoothed particle hydrodynamics method or SPH method for simulating fluid dynamics phenomena, which is based on a system of particles. The SPH method approximates the continuum with a finite number of particles that carry the physical properties and also serve as approximation points in which the field functions are approximated. Integral approximation of the field functions and its derivatives are described using kernel functions, and particle approximations as well. To ensure the consistency of a particular order, kernel functions must satisfy the conditions presented in the paper. Computer code has been developed for simulating the Poiseuille flow. It is shown that the obtained results agree fairly well with the analytical solution. As with any numerical method, the SPH method also has its advantages and disadvantages that are observed through theoretical considerations and through practice, and are summarized here.

Key words: smoothed particle hydrodynamics, kernel smoothing functions, Poiseuille flow

1. Uvod

Rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi za različita laminarna strujanja pri niskim Reynoldsovim brojevima imaju veliki značaj kako u teorijskoj, tako i u primijenjenoj mehanici fluida. Analitička rješenja tih jednadžbi su dostupna samo za jednostavnije probleme, dok se za kompliciranija strujanja u novije vrijeme sve više pribjegava raznim numeričkim metodama. Metoda konačnih razlika, konačnih volumena te konačnih elemenata su često korištene za simulaciju problema dinamike fluida. Iako su spomenute metode dobro utemeljene i često u praksi korištene, one imaju i svoje nedostatke. Primjerice, simulacije strujanja sa slobodnom površinom, kao i općenito strujanja s pomičnim granicama, je dosta teško opisati tim metodama. Kako bi se izbjegli navedeni problemi, razvijena je metoda hidrodinamike izgladenih čestica (engl. "Smoothed Particle Hydrodynamics", ili skraćeno SPH metoda). SPH metoda koristi Lagrangeov opis strujanja fluida, gdje se kontinuum, odnosno u ovom slučaju fluid, aproksimira konačnim brojem proizvoljno smještenih čestica koje nose određena fizikalna svojstva kao što su gustoća, brzina, itd. Budući ova metoda ne zahtijeva prethodno definiranu povezanost između tih čestica, ona je bezmrežna (engl. "meshless"). Iako se smatra da će bezmrežne metode zamijeniti ranije spomenute, klasične numeričke metode koje zahtijevaju neku vrstu mreže [1], one su još uvijek u razvojnoj fazi.

Kako je gibanje fluida opisano jednadžbom kontinuiteta i Navier-Stokesovim jednadžbama, u radu je predstavljena njihova SPH formulacija. Razvijen je računalni algoritam koji koristi upravo te jednadžbe u svrhu simulacije vremenski promjenjivog Poiseuilleovog strujanja pri niskim Reynoldsovim brojevima.

2. SPH jednadžbe gibanja fluida

U ovom poglavlju dan je kratki prikaz SPH formulacija jednadžbi gibanja. Kao što je spomenuto, domena strujanja je diskretizirana konačnim brojem čestica koje nisu povezane. SPH formulacija se zasniva na integralnom prikazu funkcije polja pomoću takozvanih jezgrenih (baznih) funkcija umjesto Diracove delta funkcije [2]:

$$f(x_i) = \int_{\Omega} f(x'_i) W(x_i - x'_i, h) dx'_i \quad (1)$$

U jednadžbi (1) $f(x_i)$ je funkcija polja, Ω je volumen po kojem se vrši integracija, i koji sadržava vektor položaja x_i . $W(x_i - x'_i, h)$ je jezgrena funkcija koja ovisi o udaljenosti između čvorova (odnosno čestica) i o nosaču jezgrene funkcije, parametru h . S obzirom da je Diracova delta funkcija zamijenjena s jezgrenom funkcijom, jednadžba (1) predstavlja samo aproksimaciju funkcije polja.

Aproksimacija derivacije funkcije polja (1) je dana s:

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial f(x'_i)}{\partial x'_i} W(x_i - x'_i, h) dx'_i \quad (2)$$

Koristeći lančano pravilo deriviranja iz matematičke analize, slijedi:

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[f(x'_i) W(x_i - dx'_i, h) \right] dx'_i - \int_{\Omega} f(x'_i) \frac{\partial W(x_i - x'_i, h)}{\partial x'_i} dx'_i \quad (3)$$

Primjenom teorema o divergenciji [3] na prvi integral u jednadžbi (3), te uzimajući u obzir da jezgrena funkcija iščezava na granicama integracije, prvi integral je jednak nuli ukoliko jezgrena funkcija nije blizu ruba domene. Taj problem dolazi do izražaja za čestice blizu ruba domene, te se iz tog razloga na rub domene dodaju razne “virtualne” čestice. Ukratko, ukoliko je udaljenost čestice od ruba domene najmanje h , jednadžba (3) postaje:

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} f(x_i') \frac{\partial W(x_i - x_i', h)}{\partial x_i'} dx_i' \quad (4)$$

Jednadžba (4) pokazuje da se derivacija funkcije polja prenosi na derivaciju jezgrene funkcije. Ovakva formulacija je slična Galerkinovoj slaboj formulaciji u metodi konačnih elemenata [4].

Kako dx_i' u prethodnim jednadžbama predstavlja diferencijalni volumen fluida, on se zamjenjuje s konačnim volumenom ΔV_{β} čestice β . Taj volumen je povezan s masom čestice m_{β} preko poznatog izraza:

$$m_{\beta} = \Delta V_{\beta} \rho_{\beta} \quad (5)$$

Ukoliko se integral u jednadžbi (2) zamijeni sumacijom po N čestica koje se nalaze unutar nosača jezgrene funkcije na mjestu x , funkcija polja je aproksimirana česticama:

$$f(x) = \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{\beta}}{\rho_{\beta}} f(x_{\beta}) W(x - x_{\beta}, h) \quad (6)$$

uz napomenu da x označava vektor položaja, gdje se zbog jednostavnosti ispustio indeks i . Na položaju čestice α , funkcija polja je definirana s:

$$f(x_{\alpha}) = \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{\beta}}{\rho_{\beta}} f(x_{\beta}) W_{\alpha\beta} \quad (7)$$

gdje $W_{\alpha\beta}$ označava jezgrenu funkciju čestice α , izračunatu za česticu β , odnosno $W_{\alpha\beta} = W(x_{\alpha} - x_{\beta}, h)$. Jednadžba (7) pokazuje da je vrijednost funkcije na položaju neke čestice α dobivena kao težinska srednja vrijednost od N čestica koje se nalaze u blizini čestice α .

Koristeći razne identitete iz matematičke analize, Monaghan [2] je dao sljedeći izraz za aproksimaciju derivacije prostorne funkcije na poziciji čestice α :

$$\frac{\partial f(x_{\alpha})}{\partial x_{\alpha}} = \rho_{\alpha} \left[\sum_{\beta=1}^N m_{\beta} \left[\frac{f(x_{\beta})}{\rho_{\beta}^2} + \frac{f(x_{\alpha})}{\rho_{\alpha}^2} \right] \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial f(x_{\alpha})}{\partial x_{\alpha}} = \rho_{\alpha} \left[\sum_{\beta=1}^N m_{\beta} \left[\frac{f(x_{\beta})}{\rho_{\beta}^2} + \frac{f(x_{\alpha})}{\rho_{\alpha}^2} \right] \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right] \quad (9)$$

Jednadžbe (8) i (9) su simetrizirane budući se funkcija polja pojavljuje u parovima čestica koje međusobno djeluju jedne na druge. Ovakavi simetrizirani izrazi povećavaju točnost i stabilnost simulacije, te se stoga često koriste. Prostorna derivacija jezgrene funkcije dana je izrazom:

$$\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = \frac{x_{\alpha} - x_{\beta}}{r_{\alpha\beta}} \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial r_{\alpha\beta}} = \frac{x_{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}} \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial r_{\alpha\beta}} \quad (10)$$

Pomoću prethodnih razmatranja mogu se dobiti SPH aproksimacije jednadžbe kontinuiteta i Navier-Stokesovih jednadžbi. Općenito, postoje dva načina za aproksimaciju polja gustoće, takozvana sumacija gustoće (engl. “summation density”) i kontinuirana gustoća (engl. “continuity density”). U ovom radu je korištena sumacija gustoće koja se jednostavno može dobiti ukoliko se funkcija polja u jednadžbi (6) zamijeni gustoćom:

$$\rho_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^N m_{\beta} W_{\alpha\beta} \quad (11)$$

Ovakav pristup je jednostavan i intuitivan, jer govori da je gustoća čestice α dobivena kao težinska srednja vrijednost mase čestica unutar nosača jezgrene funkcije čestice α .

U ovom radu je korišten simetrizirani oblik Navier-Stokesovih jednadžbi, dok se ostali oblici mogu naći u literaturi [2]:

$$\begin{aligned} \frac{Dv_{i(\alpha)}}{Dt} = & - \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \left(\frac{p_{(\alpha)}}{\rho_{(\alpha)}^2} + \frac{p_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}^2} \right) \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} + \\ & + \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \left(\frac{\mu_{(\alpha)} \varepsilon_{ij(\alpha)}}{\rho_{(\alpha)}^2} + \frac{\mu_{(\beta)} \varepsilon_{ij(\beta)}}{\rho_{(\beta)}^2} \right) \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \end{aligned} \quad (12)$$

gdje je $v_{i(\alpha)}$ brzina, $p_{(\alpha)}$ tlak, $\mu_{(\alpha)}$ dinamička viskoznost i $\varepsilon_{ij(\alpha)}$ tenzor brzine deformacije čestice α . Zbog jednostavnosti indeksi koji označavaju Kartezijeve koordinate (i, j) su pisani izvan zagrada, dok su indeksi koji označavaju čestice (α, β) pisani unutar zagrada. Aproksimacija tenzora brzine deformacije čestice α prema [2] glasi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij(\alpha)} = & \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{j(\beta\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} + \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\beta\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} - \\ & - \left(\frac{2}{3} \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\beta\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (13)$$

gdje $v_{i(\beta\alpha)}$ predstavlja razliku brzina između čestica α i β , odnosno $v_{i(\beta\alpha)} = v_{i(\beta)} - v_{i(\alpha)}$, dok je Kroneckerov delta simbol [5] označen s δ_{ij} . Treba napomenuti da se za prikaz viskoznih sila u fluidu koriste dvije prve derivacije, umjesto aproksimacija koje uključuju drugu derivaciju jezgrene funkcije, budući da se tenzor brzine deformacije čestice α (13) računa prije akceleracije čestice α (12). Ovakav pristup otvara mogućnost korištenja jezgrenih funkcija nižeg reda, ukoliko se za jezgrene funkcije koriste polinomi, što je čest slučaj.

3. Jezgrene funkcije

Da bi se osigurala konzistentnost integralne aproksimacije prostorne funkcije do određenog reda, te njene prve i druge derivacije, jezgrene funkcija mora zadovoljavati brojne uvjete [2]:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \int_{\Omega} W(x_i - x_i', h) dx_i' = 1 \\
 M_1 &= \int_{\Omega} (x_i - x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\
 M_2 &= \int_{\Omega} (x_i - x_i')^2 W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 M_n &= \int_{\Omega} (x_i - x_i')^n W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

i

$$\begin{aligned}
 W(x_i - x_i', h) \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \\
 W'(x_i - x_i', h) \Big|_{\partial\Omega} &= 0
 \end{aligned}$$

gdje W' označava gradijent jezgrene funkcije, a M_n n – ti moment jezgrene funkcije. Ovi uvjeti se jednostavno mogu dobiti koristeći Taylorov razvoj funkcije $f(x_i')$ oko točke x_i , uz pretpostavku da je funkcija $f(x_i')$ dovoljno glatka.

Uvjeti konzistentnosti za aproksimaciju funkcije česticama općenito nisu zadovoljeni, posebno za čestice blizu ruba domene, te zbog nejednoliko raspoređenih čestica. Da bi se ti problemi riješili, razvijene su različite metode, kao na primjer “Reproducing Kernel Particle Method” i druge [2], u kojima se jezgrene funkcije iznova konstruiraju za svaki vremenski korak, te za svaku česticu.

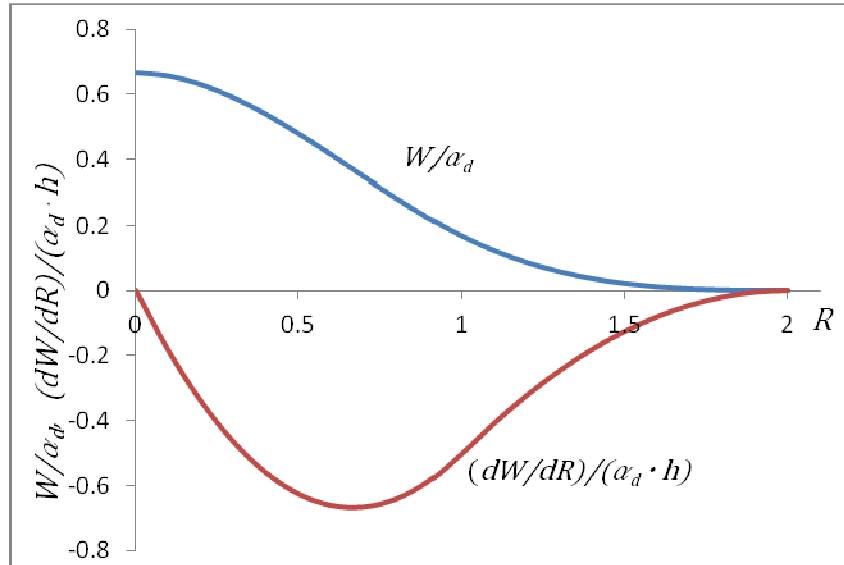
U literaturi [2] se mogu pronaći brojne jezgrene funkcije. U ovom radu je korištena takozvana “B – Spline”, kubna jezgrene funkcija, Slika 1.:

$$W(R, h) = \begin{cases} \alpha_d \left(\frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3 \right), & \text{for } 0 \leq R < 1 \\ \frac{\alpha_d}{6} (2 - R)^3, & \text{for } 1 \leq R < 2 \\ 0, & \text{for } R \geq 2 \end{cases} \tag{15}$$

gdje je R relativna udaljenost između para čestica koje međusobno djeluju jedna na drugu, definirana kao:

$$R = \frac{r}{h} = \frac{|x_i - x'_i|}{h} \quad (16)$$

Koeficijent α_d je određen pomoću prve jednadžbe u izrazu (14), koja osigurava konzistentnost nultog reda, odnosno reprodukciju konstante. Za dvodimenzionalne probleme, α_d iznosi $15/7\pi h^2$. Ova jezgrena funkcije je često korištena u SPH metodi zbog svoje sličnosti s Gaussovom zvonolikom krivuljom. Međutim, druga derivacija ove funkcije je po dijelovima linearna funkcija, što može dovesti do problema u stabilnosti simulacije.



Slika 1. "B – Spline" jezgrena funkcija (15) i njena derivacija

Fig. 1 B – Spline kernel function (15) and its derivative

4. Poiseuilleovo strujanje

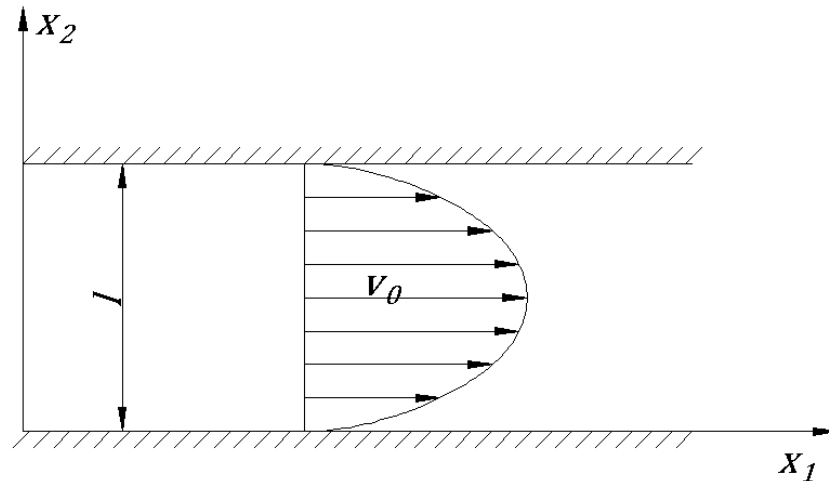
Poiseuilleovo strujanje je jedan od osnovnih problema moderne mehanike fluida. Fluid struji između dvije krute i nepomične paralelne ploče na $x_2 = 0$, and $x_2 = l$, gdje je x_2 Kartezijeva koordinata okomita na ploče ,Slika 2.. Sila F_1 , koja predstavlja gradijent tlaka u uzdužnom smjeru, počinje djelovati na fluid u mirovanju, te se nakon nekog vremena strujanje ustali.

Navier-Stokesova jednadžba koja opisuje ovo strujanje pri malim Reynoldsovim brojevima je dana izrazom[6]:

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = -\frac{dp}{dx_1} + \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} \quad (17)$$

Rješenje za nestacionarno strujanje prema Morris et al. [2] glasi:

$$v_1(x_2, t) = \frac{F}{2\nu} x_2(x_2 - l) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4Fl^2}{\nu\pi^3(2n+1)^3} \sin\left[\frac{\pi x_2}{l}(2n+1)\right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \nu}{l^2} t\right] \quad (18)$$



Slika 2. Geometrija i stacionarni profil brzine Poiseuilleovog strujanja

Fig. 2 Geometry and steady state velocity profile of Poiseuille flow

U simulaciji su korišteni sljedeći parametri:

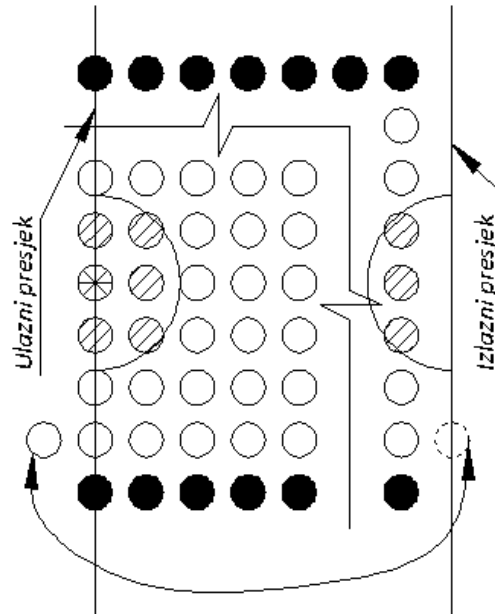
- $l = 10^{-3} \text{ [m]}$ - udaljenost između ploča,
- $\rho = 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ - gustoća vode,
- $\nu = 10^{-6} \text{ [m}^2\text{/s]}$ - kinematički koeficijent viskoznosti vode,
- $F = 2 \cdot 10^{-4} \text{ [m/s}^2\text{]}$ - sila u smjeru osi x_1 ,
- $v_0 = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ [m/s]}$ - maksimalna brzina.

Računalni kod je napisan u C++ programskom jeziku. Domena fluida je pravokutna, od $x_1 = x_2 = 0$, do $x_1 = 0.0005 \text{ [m]}$ i $x_2 = l = 0.001 \text{ [m]}$. Također, domena je predstavljena sa skupom od 861 čestica, 41 u vertikalnom smjeru, te 21 u uzdužnom. Nosač jezgrene funkcije h je 2,2 puta veći od početnog razmaka između česticama u smjeru osi x_2 . Rubni uvjeti krute stijenke su predstavljeni pomoću takozvanih virtualnih čestica [2], prikazani punim krugovima na Slici 3. U svakom vremenskom koraku je njihova brzina jednaka nuli, te im se položaj ne mijenja. U svrhu smanjenja domene, korišten je periodični rubni uvjet na ulaznom i izlaznom presjeku. Ukoliko čestica na kraju vremenskog koraka premaši određenu vrijednost uzdužne koordinatne x_1 , ona se pomiče na ulazni presjek. Kako čestice blizu ulaznog i izlaznog presjeka nemaju dovoljno susjednih čestica da bi se osigurala potrebna konzistentnost drugog reda, određene čestice na ulaznom presjeku utječu na određene čestice na izlaznom presjeku i obrnuto. To je vidljivo na Slici 3., gdje šrafirani krugovi predstavljaju susjedne čestice za jednu (prekriženu) česticu na ulaznom presjeku.

Za probleme sa stlačivim fluidima, čestice se gibaju uslijed gradijenta tlaka, dok se tlak računa pomoću jednadžbe stanja. Međutim, ukoliko se koristi jednadžba stanja za nestlačiva strujanja, to vodi do zabranjeno malih vremenskih koraka. Kako je u stvarnosti svaki fluid barem malo stlačiv, razvila se ideja umjetne stlačivosti (engl. "artificial compressibility"). Morris et al. [2] su primijenili posebnu jednadžbu stanja u svrhu proračuna tlaka:

$$p = c^2 \rho \quad (19)$$

gdje c predstavlja brzinu zvuka. Međutim, ukoliko se koristi stvarna brzina zvuka za vodu, $c \cong 1480$ [m/s], varijacija gustoće postaje vrlo mala. Stoga dolaze u obzir samo puno manje vrijednosti brzine zvuka. U ovoj simulaciji je uzeto $c^2 = 5 \cdot 10^{-12}$ [m²/s²].



Slika 3. Prikaz virtualnih čestica i periodičnog rubnog uvjeta

Fig. 3 Virtual particles and periodic boundary condition

Za gibanje čestica je korištena XSPH metoda [2] koja uzima u obzir brzinu susjednih čestica, te time na neki način uređuje gibanje fluida:

$$\frac{dx_{i(\alpha)}}{dt} = v_{i(\alpha)} - \varepsilon \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\alpha\beta)} W_{(\alpha\beta)} \quad (20)$$

gdje je ε konstanta koja poprima vrijednosti od 0 do 1. Za ovu simulaciju je ε uzet 0,3.

Vremenska integracije je računata eksplicitno “leapfrog” shemom [7] koja je jednostavna za uporabu, te je drugog reda točnosti. Pozicija čestica se računa dva puta u jednom vremenskom koraku, dok se brzina računa samo jednom, prema slijedećim izrazima:

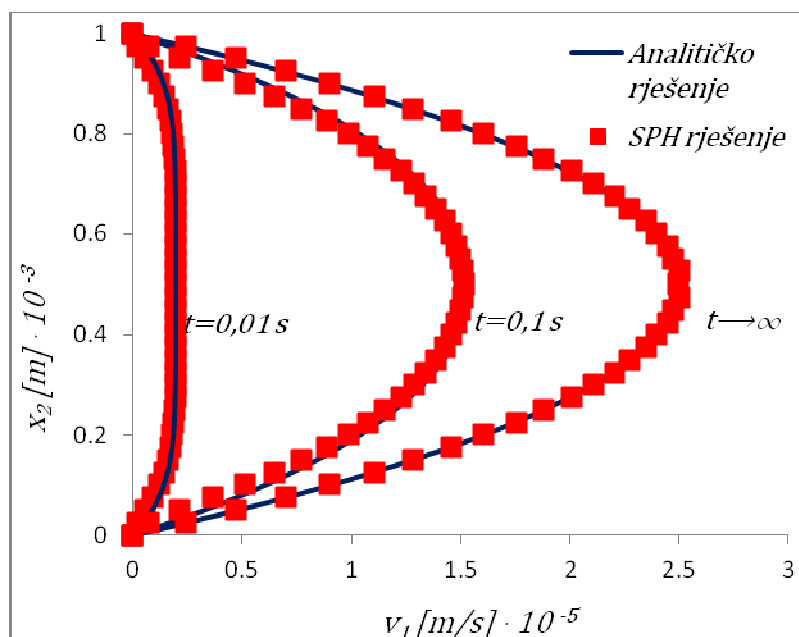
$$\begin{aligned} x_{n+\frac{1}{2}} &= x_n + \frac{1}{2} v_n \Delta t \\ v_{n+1} &= v_n + a_{n+\frac{1}{2}} \Delta t \\ x_{n+1} &= x_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} v_{n+1} \Delta t \end{aligned} \quad (21)$$

Broj iteracija je označen s n , dok a predstavlja akceleraciju čestice.

Koristeći vremenski korak Δt od 10^{-6} [s], greška se vrlo grubo može aproksimirati s Δt^2 . Kako su u pitanju vrlo mali brojevi, postavlja se pitanje same točnosti aritmetike računala [8].

5. Rezultati

Kao što je vidljivo na Slici 4., numerički rezultati se dobro slažu s analitičkim rješenjem (18), posebno za stacionarno stanje. Smanjivanjem vremenskog koraka, simulacija postaje dulja, međutim rješenje postaje točnije. Potrebno je naglasiti da povećanje brzine zvuka vodi do simetričnih oscilacija profila brzine po visini za veće vrijednosti vremena t . Također je greška numeričke simulacije veća za male vrijednosti t , kao i za područje blizu rubova gdje dolazi do izražaja nekonzistentnost integralnog prikaza funkcije pomoću jezgrenih funkcija. Stacionarno strujanje je postignuto pri $t = 1[s]$, što je prikazano kao $t = \infty$ na Slici 4.



Slika 4. Usporedba rezultata dobivenih SPH metodom s analitičkim rješenjem za Poiseuilleovo strujanje

Fig. 4 Comparison of SPH solution with analytical solution for Poiseuille flow

6. Zaključak

Bezmrežne metode, kao što je SPH metoda koriste puno više procesorskog vremena. Iako su relativno mlade u usporedbi s metodom konačnim elemenata ili metodom konačnih volumena, može se očekivati da će se ovakve metode sve više i više koristiti u inženjerskoj praksi. Vrijeme koje inženjeri troše na generiranje mreža u spomenutim, bolje utemeljenim metodama je puno skuplje od procesorskog vremena. Očekuje se da će SPH metoda polako sazrijevati kroz teorijska i praktična razmatranja. Najveći problem predstavlja konzistentnost aproksimacije česticama i generiranje rubnih uvjeta pomoću virtualnih čestica, te se na tim područjima još mora puno raditi. Uz sve nedostatke, vidljivo je da je za jednostavnija strujanja moguće dobiti vrlo zadovoljavajuće rezultate, kao što je pokazano u ovom radu na primjeru Poiseuilleovog strujanja.

U budućnosti autori planiraju razviti modele turbulencije na temelju pseudo generatora slučajnih brojeva te tako dobivena rješenja usporediti s analitičkim rješenjima za jednostavna strujanja ili s metodom konačnih volumena za proizvoljne geometrije.

LITERATURA

- [1] LIU, G. R.: "Mesh Free Methods, Moving Beyond the Finite Element Method", CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, 2003.

- [2] LIU, G. R., LIU, M. B., "Smoothed Particle Hydrodynamics: a Meshfree Particle Method", World Scientific, Singapore, 2003.
- [3] KREYSZIG, E.: "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley & Sons, Inc., New York, 2006.
- [4] SORIĆ, J., "Metoda konačnih elemenata", Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [5] DEGIULI, N., WERNER, A., "Mehanika Fluida IB" - podloge za nastavu, <http://www.fsb.hr/zbrodo/>, 2008.
- [6] WERNER, A., "Odabrana poglavlja iz mehanike fluida", zbirka zadataka, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2002.
- [7] ROMEEL, D., "Leapfrog Integration", http://ursa.as.arizona.edu/~rad/phys305/ODE_III/node11.html., 2011.
- [8] SINGER, S., "Numerička matematika", predavanja, Zagreb, 2009.