

BEZMREŽNA MJEŠOVITA MLPG METODA ZA RJEŠAVANJE DIFERENCIJALNE JEDNAŽDBE VISOKOG REDA

Jarak, T. & Sorić, J.

Sažetak: Prikazana je primjena mješovite bezmrežne lokalne Petrov-Galerkin (MLPG) metode na rješavanje diferencijalnih jednadžbi 4. reda. Primjenom različitih testnih funkcija u lokalnim slabim oblicima diferencijalnih jednadžbi izvedene su različite mješovite bezmrežne numeričke metode. Numerička učinkovitost tako izvedenih algoritama prikazana je na odgovarajućim reprezentativnim numeričkim primjerima.

Ključne riječi: mješovite bezmrežne metode, MLPG, diferencijalne jednadžbe 4. reda, MLS aproksimacija, tanke grede, gradijentne metode.

1 UVOD

Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi visokog reda pomoću metode konačnih elemenata (MKE) u pravilu rezultira složenim numeričkim formulacijama [6]. Kod standardnih MKE potrebno je primijeniti C1 elemente koji su neučinkoviti kod 3D problema dok je kod mješovitih KE potrebno zadovoljiti LBB uvjete da bi se osigurala numerička stabilnost rješenja [5]. To zahtjeva pravilni izbor aproksimacijskih funkcija za pojedina nepoznata fizikalna polja, što je netrivialan problem.

Kao alternativa MKE predložene su bezmrežne numeričke metode zbog visokog reda kontinuiteta aproksimacijskih funkcija [8]. Međutim, kod C1 bezmrežnih metoda primijećena je značajno smanjena numerička učinkovitost zbog netočnosti u aproksimiranju derivacija višeg reda kao i zbog neučinkovite numeričke integracije derivacija aproksimacijskih funkcija [3], [9].

Zbog toga se u ovom radu razmatra primjena mješovitog pristupa temeljenih na bezmrežnoj MLPG metodi [1]. Primjenom različitih testnih funkcija u slabim oblicima diferencijalnih jednadžbi izvedene su različite numeričke metode. Rezultirajuće jednadžbe sustava predstavljaju uvjete ravnoteže sustava i različiti uvjeti kompatibilnosti između aproksimiranih polja. Sva nepoznata fizikalna polja aproksimirana su pomoću interpolirajuće metode najmanjih pomičnih kvadrata (MLS funkcije) [9], kako bi se olakšalo zadovoljavanje rubnih uvjeta i uvjeta kompatibilnosti. Za razliku od rada [3], gdje su uvjeti kompatibilnost zadovoljeni samo u kolokacijskoj formi, ovdje se razmatraju i slabi oblici uvjeta kompatibilnosti. Posebna pažnja posvećena je zadovoljavanju rubnih uvjeta. Učinkovitost pojedinih algoritama ispitana je na odgovarajućim demonstrativnim numeričkim primjerima.

2 JEDNAŽBE SUSTAVA I LOKALNI SLABI OBLICI JEDNAŽBI

U ovom radu prikazuje se primjena mješovite MLPG metode za rješavanje jednodimenzijske diferencijalne jednadžbe 4. reda općenitog oblika:

$$aw^{(4)} + bw'' + cw - q = 0, \quad u \in \Omega. \quad (1)$$

Globalna domena Ω omeđena je globalnom granicom Γ na kojoj su zadani sljedeći rubni uvjeti

$$\begin{aligned} w &= \bar{w} \text{ on } \Gamma_w, & w' &= \bar{w}' \text{ on } \Gamma'_w, & w'' &= \bar{w}'' \text{ on } \Gamma''_w, & w''' &= \bar{w}''' \text{ on } \Gamma'''_w, \\ \Gamma &= \Gamma_w \cup \Gamma'_w \cup \Gamma''_w \cup \Gamma'''_w, & \Gamma_w \cap \Gamma'''_w &= \emptyset, & \Gamma'_w \cap \Gamma''_w &= \emptyset. \end{aligned} \quad (2)$$

U gornjim izrazima, $\Gamma_w, \Gamma'_w, \Gamma''_w$ and Γ'''_w su dijelovi Γ sa zadanim vrijednostima za $w, w', w'',$ i w''' . U općem slučaju, interpretacija fizikalnog značenja tih varijabli, kao i parametara a, b, c i q u (1) ovisi o razmatranom problemu.

U mješovitom MLPG pristupu, sve navedene varijable (w, w', w'' i w''') mogu biti odabrane kao nepoznate varijable koje je potrebno aproksimirati kako bi se dobilo rješenje. Pri takvom pristupu poželjno je da su među tim varijablama zadovoljeni sljedeći uvjeti kompatibilnosti:

$$d u_2 = u'_1, \quad e u_3 = u'_2, \quad f u_4 = u'_3. \quad (3)$$

gdje je $u_1 = w$, a d, e i f su parametri koji ovise o promatranom problemu.

Primjenom metode težinskih reziduala, izrazi (1) i (3) se mogu zapisati u sljedećem integralnom obliku definiranom u nekom malom području Ω_s koje se nalazi u Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} v_1 (u'_1 - u_2) d\Omega &= 0, & \int_{\Omega_s} v_2 (u'_2 - u_3) d\Omega &= 0, & \int_{\Omega_s} v_3 (u'_3 - u_4) d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega_s} v_4 (a u'_4 + b u'_2 + c u_1 - q) d\Omega &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

gdje su $v_i, i = 1, 2, 3, 4$, proizvoljne kinematički prihvatljive testne funkcije. Ovisno o izboru tih testnih funkcija, moguće je izvesti različite numeričke metode. Izrazi (4) nazivaju se lokalni slabi oblici (LSO) diferencijalnih jednadžbi sustava.

3 NUMERIČKE METODE

3.1 Diskretizacija

Globalna domena Ω diskretizirana je pomoću skupa čvorova $x_I, I = 1, 2, \dots, N$. Oko svakog čvora I definirano je malo područje Ω_s^I koje se naziva lokalna sub-domena i za svaku Ω_s^I postavlja se LSO (4).

U ovom radu sve nepoznate varijable polja aproksimirane su pomoću iste bezmrežne IMLS aproksimacijskih funkcija u sljedećem obliku:

$$u_i(x) = \sum_{J=1}^N \phi_J(x) (\hat{u}_i)_J, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

U gornjem izrazu, ϕ_J predstavlja jednodimenzijsku IMLS čvornu funkciju [9] dok $(\hat{u}_i)_J$ označava čvornu vrijednost varijable u_i u čvoru J . Uvrštavanjem (5) u LSO (4), dobiva se diskretizirani sustav jednadžbi.

3.2 Mješovita MLPG metoda 2. vrste (mm-MLPGv2)

Ovdje je prikazana modificirana verzija tzv. MLPG metode 2. vrste, prikazane u [3]. U toj metodi, testna funkcija v_4 je Heavisideova funkcija. Ako su za v_1, v_2 i v_3 odabrane

Diracove funkcije $v_i = \delta(x, x_I)$, uvjeti kompatibilnosti (3) su zadovoljeni kolokacijom samo u čvorovima. Rubni uvjeti za u_2 i u_3 zadovoljeni su pomoću metode najmanjih kvadrata, slično kao u [2]. Nakon diskretiziranja tako dobivenih jednadžbi pomoću aproksimacija (5), moguće je dobiti sljedeći sustav jednadžbi za svaki čvor:

$$\frac{1}{1 + \beta_I^2} u'_1(x_I) - d u_2(x_I) = -\frac{\beta_I^2}{1 + \beta_I^2} \bar{u}_2(x_I), \quad \frac{1}{1 + \gamma_I^2} u'_2(x_I) - e u_3(x_I) = -\frac{\gamma_I^2}{1 + \gamma_I^2} \bar{u}_3(x_I),$$

$$u'_3(x_I) - f u_4(x_I) = 0, \quad (6)$$

$$\int_{L'_S \cup \Gamma'_{SU3}} n b u_2 d\Gamma + \int_{L'_S \cup \Gamma'_{SU1}} n a u_4 d\Gamma + \int_{\Omega'_S} c u_1 d\Gamma = - \int_{\Gamma'_{SU4}} n a \bar{u}_4 d\Gamma - \int_{\Gamma'_{SU2}} n b \bar{u}_2 d\Gamma + \int_{\Omega'_S} q d\Gamma.$$

β_I i γ_I su težinski ili kazneni faktori. Ako je za neki čvor $\Gamma_{SU1} = \Gamma_w \neq \emptyset$, onda se za taj čvor umjesto zadnje jednadžbe u (6) nameće jednadžba $u_1 = \bar{u}_1$. Za razliku od [3], ovdje nije provedena supstitucija diskretiziranih uvjeta kompatibilnosti u jednadžbu ravnoteže. Iako to rezultira većim globalnim sustavom jednadžbi, omogućava ispravno zadovoljavanje rubnih uvjeta, odnosno dobivanje dobro uvjetovanog sustava jednadžbi.

3.3 Mješovita bezmrežna metoda konačnih volumena (mMFVM)

U [7], primjenom Heavisideovih testnih funkcija u izrazima (4), izvedena je mješovita bezmrežna metoda konačnih volumena. Uz upotrebu aproksimacija (5), nakon provedene parcijalne integracije i primjenom Gaussovog teorema, izrazi (4) se mogu transformirati u diskretizirani sustav jednadžbi u obliku:

$$\sum_{J=1}^N \mathbf{K}_{IJ} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{R}_I, \quad (7)$$

gdje je \mathbf{K}_{IJ} matrica doprinosa čvora J krutosti lokalne sub-domene Ω'_S , $\hat{\mathbf{U}}$ vektor čvornih vrijednosti aproksimiranih varijabli, a \mathbf{R}_I vektor sila za čvor I :

$$\mathbf{R}_I = \left[- \int_{\Gamma'_{SU1}} n \bar{u}_1 d\Gamma \quad - \int_{\Gamma'_{SU2}} n \bar{u}_2 d\Gamma \quad - \int_{\Gamma'_{SU3}} n \bar{u}_3 d\Gamma \quad \int_{\Omega'_S} q d\Gamma - \int_{\Gamma'_{SU4}} n a \bar{u}_4 d\Gamma \right]^T. \quad (8)$$

Vidljivo je da je pri proračunavanju matrice krutosti potrebno provesti numeričku integraciju. Pojas tako dobivene globalne matrice krutosti stoga je značajno širi od onog dobivenom u mm-MLPGv2 metodi. Također, svi rubni uvjeti su ovdje zadovoljeni u „slabom“, integralnom obliku.

3.4 Mješovita MLPG metoda temeljena na zakonima očuvanja količine gibanja i momenta količine gibanja (mMFVM)

Ako se u (4) za testne funkcije v_1 i v_2 upotrijebe Diracove funkcije, a za v_3 i v_4 Heavisideove funkcije, jednadžbe za neki čvor I poprimit će sljedeći oblik:

$$(u'_1 - d u_2)|_{x=x_I} = 0, \quad (u'_2 - e u_3)|_{x=x_I} = 0, \quad \int_{L'_S \cup \Gamma'_{SU2}} n u_3 d\Gamma - \int_{\Omega'_S} f u_4 d\Gamma = - \int_{\Gamma'_{SU3}} n \bar{u}_3 d\Gamma,$$

$$\int_{L'_S \cup \Gamma'_{SU3}} n b u_2 d\Gamma + \int_{L'_S \cup \Gamma'_{SU1}} n a u_4 d\Gamma + \int_{\Omega'_S} c u_1 d\Gamma = - \int_{\Gamma'_{SU4}} n a \bar{u}_4 d\Gamma - \int_{\Gamma'_{SU2}} n b \bar{u}_2 d\Gamma - \int_{\Omega'_S} q d\Gamma. \quad (9)$$

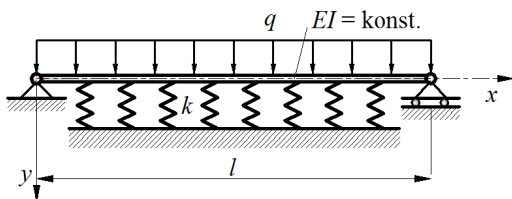
Vidljivo je da prve dvije jednadžbe predstavljaju uvjete kompatibilnosti za prvu, odnosno drugu derivaciju, u čvorovima. Nakon primjene aproksimacija (5) moguće je,

supstitucijom prva dva izraza u preostale izraze iz (9), eliminirati čvorne vrijednosti za u_2 i u_3 iz sustava jednažbi, slično kao i u [3]. Rezultirajući sustav jednažbi sastoji se od samo dvije jednažbe koje predstavljaju principe očuvanja količine i momente količine gibanja za Ω_S^I . U njima se pojavljuju u slabom obliku samo rubni uvjeti za varijable \bar{u}_3 i \bar{u}_4 . Ako su zadani esencijalni rubni uvjeti za neki čvor I , $u_1 = \bar{u}_1$ i/ili $u_2 = \bar{u}_2$, onda se u sustav jednažbi uvrštava taj diskretizirani uvjet umjesto prethodno navedenih uvjeta ravnoteže.

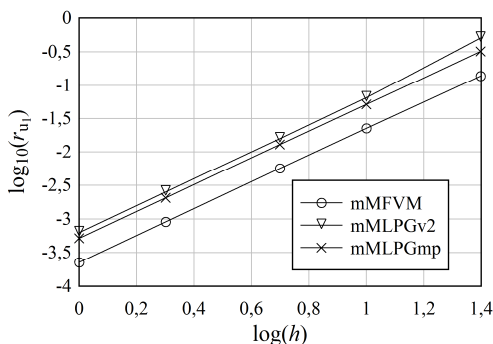
4 NUMERIČKI PRIMJERI

4.1 Savijanje tanke grede

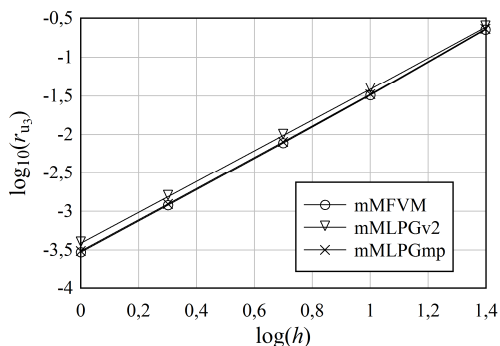
Tanka jednostavna greda duljine $l=100$ i konstantne savojne krutosti $EI=5 \cdot 10^6$ opterećena je kontinuiranim opterećenjem $q=1$, prema Slici 1. Greda je postavljena na elastičnu podlogu krutosti $k=1$.



Sl. 1. Jednostavno oslonjena greda opterećena poprečnim kontinuiranim opterećenjem



Sl. 2. Konvergencija progiba za slobodno oslonjenu gredu



Sl. 3. Konvergencija zakrivljenosti za slobodno oslonjenu gredu

Diferencijalna jednažba koja opisuje ovaj problema ima sljedeći oblik:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw - q = 0.$$

Referentno analitičko rješenje ima složeni eksponencijalno-trigonometrijski oblik [3]. Usporedbom izraza (1) i (10), slijedi da je $a = EI$, $b = 0$ i $c = k$. Također, $d = e = f = 1$. Primijenjena je IMLS aproksimacijska shema s linearnom bazom (IMLS1). Na Slikama 2 i 3 prikazana je konvergencija za progib ($w = u_1$) i

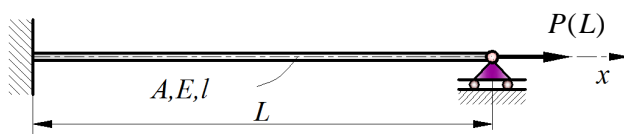
zakrivljenost ($w'' = u_3$). Vidljivo je da sve metode ostvaruju približno jednaku brzinu konvergencije, s tim da je mMFVM nešto točnija za pomak.

4.2 Aksijalno opterećenje štapa s gradijentno elastičnim materijalom

U slučajevima kad karakteristična dimenzija mikrostruktura materijala postaje usporediva s ukupnom veličinom tijela klasične teorije kontinuuma postaju neadekvatne jer ne uzimaju u obzir utjecaj mikrostrukture na ponašanje tijela. U tim slučajevima, pogodno je koristiti tzv. gradijentne materijalne teorije. U slučaju gradijentne elastičnosti, ponašanje štapa može se najjednostavnije opisati pomoću sljedeće jednačbe [4]:

$$-l^2 Eu^{(4)} + Eu'' - q = 0 \quad (11)$$

Usporedbom izraza (1) i (11), vidljivo je da je $a = -l^2 E$, $b = E$ i $c = 0$, gdje je l mikrostrukturni parametar. Štap je prikazan na Slici 4.



Sl. 4. Aksijalno opterećeni štap s gradijentnim efektima

Na štap su postavljene sljedeći rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} u(0) = 0, R(0) = AEu''(0) = 0, \\ u'(L) = 0.5 = \bar{u}', P(L) = AE[\bar{u}'(L) - l^2 \bar{u}'''(L)]. \end{aligned} \quad (12)$$

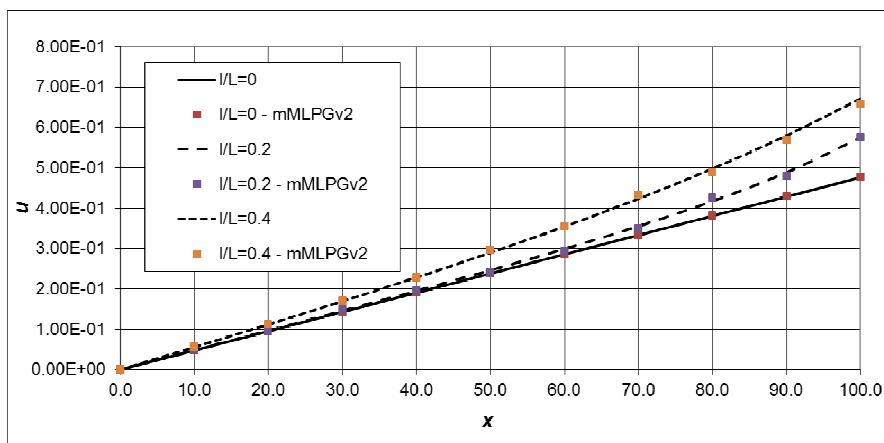
Za proračune su uzete sljedeće vrijednosti parametara: $E = 210$, $A = 4$, $\bar{u}' = 0.5$, $P = 4$ i $L = 100$, a mikrostrukturni parametar l je variran kako bi se testirala osjetljivost formulacije na utjecaj mikrostrukture na ponašanje štapa, tzv. *size effect*. Proračuni su provedeni pomoću metode *mm-MLPGv2* s IMLS aproksimacijama s kvadratnom bazom (IMLS2). Numerička rješenja uspoređena su s analitičkim rješenjima [4] na Slici 5. Vidljivo je dobro poklapanje s referentnim rješenjima.

5 ZAKLJUČAK

U radu su prikazane mješovite bezmrežne MLPG metode za rješavanje problema opisanih diferencijalnim jednačbama 4. reda. Primjenom različitih testnih funkcija izvedene su tri različite formulacije iz slabih oblika diferencijalnih jednačbi dobivenih pomoću metode težinskih reziduuma. U svakoj od formulacija razvijene su metode za ispravno zadovoljavanje odgovarajućih rubnih uvjeta. Primjenjivost metoda je testirana pomoću reprezentativnih primjera. Rezultati pokazuju da svi algoritmi imaju gotovo identične brzine konvergencija za sve aproksimirane varijable, pri čemu mješovita metoda konačnih volumena (mMFVM) postiže najveću točnost za primarne varijable.

Zahvala:

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom *Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel* (2516).



Sl. 5. Raspodjela pomaka u aksijalno opterećenom štapu s gradijentnim efektima

Literatura:

- [1] Atluri, S.N., Han, Z.D., Rajendran, M.J., A New Implementation of the Meshless Finite Volume Method, Through the MLPG “Mixed” Approach, *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. 6, 2004, pp. 491–513.
- [2] Atluri, S.N., Liu, H.T., Han, Z.D., Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems. *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. 14, No. 3, 2006, pp. 141–152.
- [3] Atluri S.N., Shen, S., Simulation of a 4th Order ODE: Illustration of Various Primal & Mixed MLPG Methods. *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. 7, 2005, pp. 241-268.
- [4] Papargyri-Beskou, S., Beskos, D., Static Analysis of Gradient Elastic Bars, Beams, Plates and Shells, *The Open Mechanics Journal*, Vol.4, 2010, pp. 65-73.
- [5] Chapelle, D., Bathe, K.J., *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [6] Engel, G., Garikipati, K., Hughes, T., Larson, M., Mazzei, L., Taylor, R., Continuous/discontinuous Finite Element Approximations of Fourth-order Elliptic Problems in Structural and Continuum Mechanics with Applications to thin Beams and Plates, and Strain Gradient Elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 191, 2002, pp. 3669–3750.
- [7] Moosavi, M.R., Delfanian, F., Khelil, A., The Orthogonal Meshless Finite Volume Method for Solving Euler-Bernoulli Beam and Thin Plate Problems, *Thin-Walled Structures*, Vol. 49, 2011, pp. 923-932.
- [8] Krystl, P., Belytschko, T., Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Method. *Computational Mechanics*, Vol. 16, 1995, pp.1-10.
- [9] Sorić, J., Jarak, T., Mixed Meshless Formulation for Analysis of Shell-like Structures, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, 2010, pp. 1153-1164.

Autori:

Tomislav Jarak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, HR-10002 Zagreb, tel: 01 6168 514, fax: 01 6168187, e-mail: tomislav.jarak@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/jarak
Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, HR-10002 Zagreb, tel: 01 6168 103, fax: 01 6168 187, e-mail: jurica.soric@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/soric