

MODELIRANJE OŠTEĆENJA PRIMJENOM KONAČNIH ELEMENTA VIŠEG REDA

Putar, F., Sorić, J., Lesičar, T., Tonković, Z.

Sažetak: U provedenom istraživanju razmatrano je modeliranje kvazi-krhke pojave popuštanja materijala koristeći dvodimenzijski trokutni konačni element C^1 kontinuiteta. Formulacija modela oštećenja temeljena je na izotropnom zakonu oštećenja primijenjenom na konstitutivne relacije pune gradijentne teorije, a koje uključuju naprezanja i deformacije drugog reda. Razvijenim algoritmom je uz homogenu omogućeno i razmatranje heterogenih materijala korištenjem računalne homogenizacije drugog reda, čime se izračunavaju potrebne konstitutivne matrice. Pri razmatranju heterogenih materijala iskorištena su dva različita heterogena reprezentativna volumna elementa, gdje su rezultati analize popuštanja uspoređeni s rezultatima dobivenima za odgovarajuće homogene materijale s jednakom unutarnjom duljinskom skalom. Izvedena formulacija konačnog elementa ugrađena je u programski paket ABAQUS. Točnost i učinkovitost predloženog gradijentnog modela popuštanja pokazane su na primjeru vlačno opterećene ploče.

Ključne riječi: Modeliranje oštećenja, Konačni element C^1 kontinuiteta, Teorija gradijentnih deformacija, Heterogeni materijali.

1 UVOD

Poznata je činjenica da modeliranje pojave oštećenja korištenjem klasične mehanike kontinuuma ne daje dobra rješenja jer diferencijalne jednadžbe koje opisuju proces deformiranja mogu izgubiti svojstvo eliptičnosti kada dolazi do popuštanja materijala. U tom slučaju matematički opis modela postaje loše uvjetovan i numerička rješenja ne konvergiraju realnom rješenju [1]. Većina regularizacijskih tehnika izvedenih za rješavanje tog problema temeljena je na poboljšanju modela klasičnog kontinuuma njegovim obogaćivanjem parametrima unutarnje duljinske skale na više različitih načina. Među tim tehnikama do izražaja posebice dolaze tehnike temeljene na nelokalnoj mehanici kontinuuma, i to zbog njihove primjenjivosti pri razmatranju raznovrsnih problema. Jedna od tih tehnika temelji se na uvođenju nelokalnosti u model putem dodatnog člana višeg reda u funkciju gustoće energije deformiranja, a koji uključuje gradijente deformacije, odnosno deformacije drugog reda te njihove konjugirane vrijednosti, naprezanja drugog reda [2]. S tim u vezi, a u sklopu višerazinskog modeliranja deformiranja materijala poznata je takozvana puna gradijentna teorija koja nelokalnost ne uključuje direktno preko parametra mikrostrukturne skale, već preko veličine reprezentativnog volumnog elementa (RVE-a). Veličina RVE-a je u modelu obuhvaćena vrijednostima tangenčnih matrica krutosti višeg reda, koje se izračunavaju primjenom računalne homogenizacije drugog reda [3].

2 FORMULACIJA KONAČNOG ELEMENTA C^1 KONTINUITETA ZA ANALIZU POPUŠTANJA

U analizi popuštanja korišten je izotropni konstitutivni model oštećenja koji degradaciju elastičnih svojstava krutosti u kvazi-krhkim materijalima opisuje na temelju sljedeće konstitutivne relacije:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1)$$

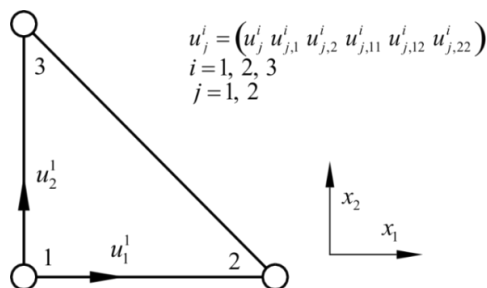
U gornjoj jednadžbi D je skalarna varijabla oštećenja koja može poprimiti vrijednosti između 0 i 1, što su granične vrijednosti za neoštećeni i potpuno oštećeni materijal. $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ i \mathbf{C} redom predstavljaju tenzore Cauchyjevog naprezanja, deformacije i elastične krutosti. U provedenom istraživanju korišten je linearni zakon nastajanja oštećenja koji se najčešće koristi pri teoretskim razmatranjima ponašanja materijala [4]:

$$D = \begin{cases} \frac{k_u (\varepsilon_{eqv} - k_0)}{\varepsilon_{eqv} (k_u - k_0)} & k_0 \leq \varepsilon_{eqv} \leq k_u, \\ 1 & \varepsilon_{eqv} > k_u \end{cases}, \quad (2)$$

gdje su k_0 i k_u materijalni parametri koji redom predstavljaju graničnu deformaciju iniciranja oštećenja i deformaciju pri kojoj materijal u potpunosti gubi krutost. ε_{eqv} je najveća postignuta ekvivalentna elastična deformacija u materijalnoj točki tijekom simulacije, a ovdje se izračunava koristeći vlačne glavne deformacije ε_1 i ε_2 :

$$\varepsilon_{eqv} = \sqrt{(\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2} \quad \text{for } \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0. \quad (3)$$

Formulacija modela oštećenja izvedena u ovom radu implementirana je u trokutni konačni element C^1 kontinuiteta za ravninsko stanje deformacija [5], a koji je prikazan na sl. 1. Element sadrži tri čvora uz ukupno 36 stupnjeva slobode, a polje pomaka aproksimirano je punim polinomom petog stupnja. Stupnjevi slobode su dva pomaka te njihove prve i druge derivacije s obzirom na Kartezijeve koordinate.



Sl. 1. Trokutni konačni element C^1 kontinuiteta [5]

Kao što je uobičajeno, izvod jednadžbi konačnog elementa slijedi iz principa virtualnih radova, koji je za gradijentni kontinuum jednak:

$$\int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA + \int_A \delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu} dA = \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} ds + \int_s \delta (\text{grad } \mathbf{u}^T) \mathbf{T} ds. \quad (4)$$

U jednadžbi (4) A i s su redom površina i rub elementa, $\boldsymbol{\eta}$ predstavlja tenzor deformacije drugog reda koji sadrži druge derivacije vektora pomaka \mathbf{u} , a $\boldsymbol{\mu}$ je

konjugirana veličina tenzora deformacije drugog reda, takozvani tenzor naprezanja drugog reda ili „double stress“ tenzor. \mathbf{t} i \mathbf{T} su vektori sila pridruženi vektoru pomaka i gradijentu vektora pomaka. Uključivanjem izotropnog zakona oštećenja u inkrementalni oblik konstitutivnih relacija koje proizlaze iz pune gradijentne teorije, prikazane u [5], dobiva se:

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\sigma} &= \Delta \left[(1-D) (\mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_{\sigma\eta} \boldsymbol{\eta}) \right] \\ \Delta\boldsymbol{\mu} &= \Delta \left[(1-D) (\mathbf{C}_{\mu\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_{\mu\eta} \boldsymbol{\eta}) \right].\end{aligned}\quad (5)$$

Veličine $\mathbf{C}_{\sigma\varepsilon}$, $\mathbf{C}_{\sigma\eta}$, $\mathbf{C}_{\mu\varepsilon}$ i $\mathbf{C}_{\mu\eta}$ su konstitutivne tangente matrice koje se izračunavaju za odgovarajući RVE korištenjem homogenizacije drugog reda. U slučaju materijalne homogenosti, konstitutivne matrice $\mathbf{C}_{\sigma\eta}$ i $\mathbf{C}_{\mu\varepsilon}$ jednake su nuli, a preostale dvije matrice mogu se naći analitički [3], i funkcija su izotropnih materijalnih konstanti:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} &= \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon}(E, \nu), \\ \mathbf{C}_{\mu\eta} &= \mathbf{C}_{\mu\eta}(E, \nu, L).\end{aligned}\quad (6)$$

Ovdje L predstavlja veličinu RVE-a. U sklopu homogenizacije drugog reda poznato je da se ta veličina može povezati s unutarnjom duljinskom skalom l u obliku:

$$l^2 = \frac{L^2}{12}.\quad (7)$$

Raspisivanjem relacije (4) u inkrementalnom obliku te uvrštavanjem izraza (5), uz korištenje dodatnih relacija koje se mogu naći u [5], dobiva se jednačba konačnog elementa u obliku:

$$\left(\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{K}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{K}_{\eta\varepsilon} + \mathbf{K}_{\eta\eta} \right) \Delta\mathbf{v} = \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_i,\quad (8)$$

gdje su pojedine matrice krutosti elementa jednake:

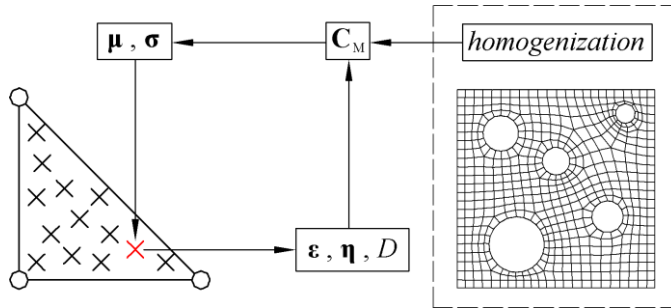
$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} &= \int_A \mathbf{B}_\varepsilon^T \left[(1-D^{i-1}) \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} - \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^{i-1} \left(\frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{i-1} - \mathbf{C}_{\sigma\eta} \boldsymbol{\eta}^{i-1} \left(\frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{i-1} \right] \mathbf{B}_\varepsilon dA, \\ \mathbf{K}_{\varepsilon\eta} &= \int_A \mathbf{B}_\varepsilon^T (1-D^{i-1}) \mathbf{C}_{\sigma\eta} \mathbf{B}_\eta dA, \\ \mathbf{K}_{\eta\varepsilon} &= \int_A \mathbf{B}_\eta^T \left[(1-D^{i-1}) \mathbf{C}_{\mu\varepsilon} - \mathbf{C}_{\mu\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^{i-1} \left(\frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{i-1} - \mathbf{C}_{\mu\eta} \boldsymbol{\eta}^{i-1} \left(\frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{i-1} \right] \mathbf{B}_\varepsilon dA, \\ \mathbf{K}_{\eta\eta} &= \int_A \mathbf{B}_\eta^T (1-D^{i-1}) \mathbf{C}_{\mu\eta} \mathbf{B}_\eta dA.\end{aligned}\quad (9)$$

U navedenim izrazima gornji indeks $(i-1)$ označava zadnje konvergirano ravnotežno stanje. Vektori unutarnjih i vanjskih čvornih sila u jednačbi (8) definirani su kao:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_e &= \int_s (\mathbf{N}^T \mathbf{t} + \text{grad} \mathbf{N}^T \mathbf{T}) ds, \\ \mathbf{F}_i &= \int_A (\mathbf{B}_\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma}^{i-1} + \mathbf{B}_\eta^T \boldsymbol{\mu}^{i-1}) dA.\end{aligned}\quad (10)$$

Postupak analize navedenim algoritmom ukratko je prikazan dijagramom na sl. 2. Prije početka inkrementalno-iterativne petlje, vrijednosti tangenitnih krutosti koje se pojavljuju u relaciji (5) izračunavaju se homogenizacijom drugog reda koristeći odgovarajući RVE. Budući da se u radu razmatra linearno elastično ponašanje materijala,

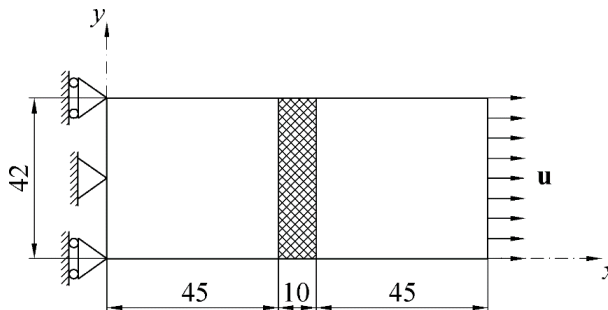
homogenizaciju je potrebno provesti samo jednom, i to prije analize popuštanja. Nakon što su homogenizirane vrijednosti tenzora krutosti poznate, one ostaju konstantnima tijekom cijele analize, a degradacija krutosti se pritom odvija izotropnim zakonom oštećenja. Opisani postupak uključen je u prethodno opisani trokutni element koristeći programski paket ABAQUS.



Sl. 2. Shema algoritma oštećenja

3 NUMERIČKI PRIMJER

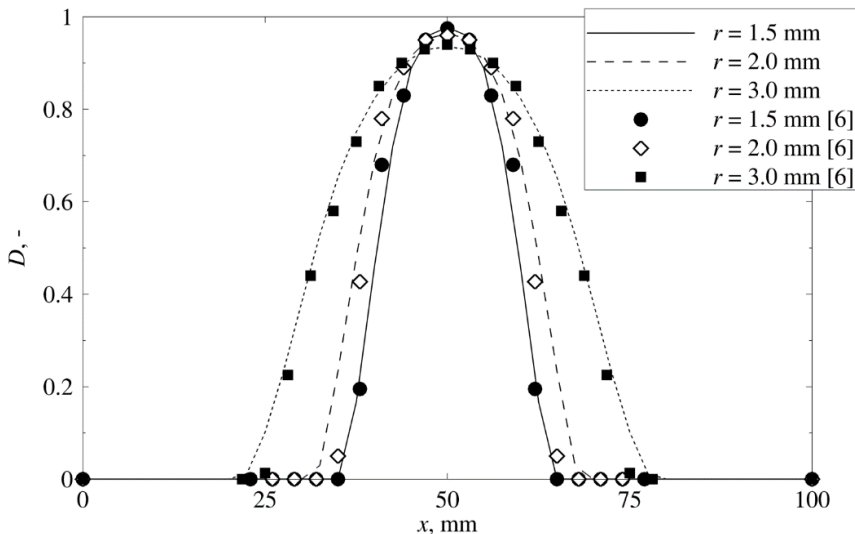
Prikazani algoritam verificiran je na testnom primjeru već razmatranom u [6] uz pretpostavku homogenog materijala. Ovdje je analiza proširena na heterogene materijale. Primjer čini vlačno opterećena pravokutna ploča s nesavršenom središnjom zonom, kao što je prikazano na sl. 3. Svojstva modela su sljedeća: Youngov modul $E = 20000 \text{ N/mm}^2$, Poissonov faktor $\nu = 0.25$, granična ekvivalentna elastična deformacija $k_0 = 0.0001$, ekvivalentna elastična deformacija koja odgovara potpuno oštećenom stanju $k_u = 0.0125$. Model je na desnom rubu opterećen horizontalnim pomakom od 0.0325 mm . U središnjoj zoni ploče Youngov modul smanjen je za 10% kako bi se inicirala lokalizacija.



Sl. 3. Geometrija i rubni uvjeti modela ploče

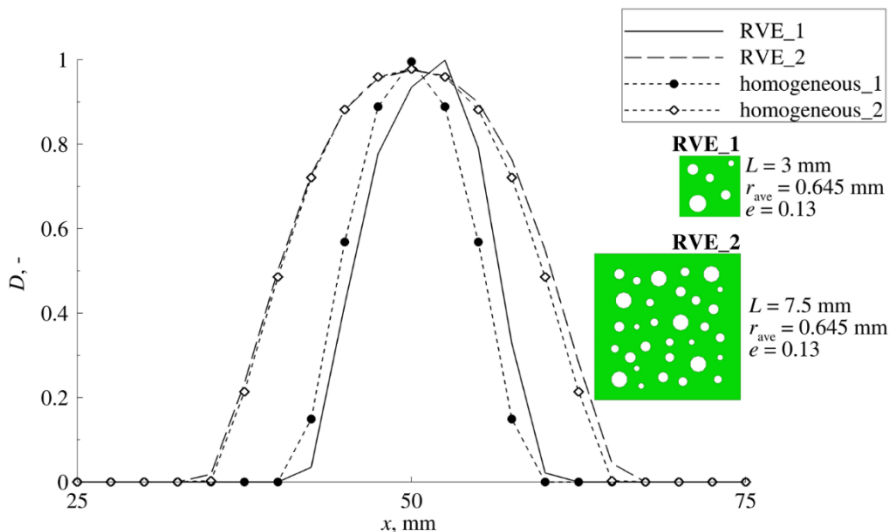
U [6] je isti primjer riješen EFG bezmrežnom metodom uz pretpostavku homogenog i granularnog materijala čija je mikrostruktura opisana preko tzv. čestičnog radijusa r koji ulazi u definiciju materijalnog tenzora višeg reda. Koristeći spomenuti materijalni model i prethodno predstavljene algoritam za računanje oštećenja, dobiveni su rezultati čija je usporedba s rezultatima iz literature prikazana na sl. 4. Kao što se sa slike može vidjeti, izračunate raspodjele varijabli oštećenja pokazuju veoma dobra poklapanja s rezultatima iz literature. Osim toga slika prikazuje utjecaj veličine mikrostrukture, tj.

intenziteta mikrostrukturnih interakcija na ponašanje makrorazinskog kontinuuma. Povećanje, u ovom slučaju čestičnog radijusa kao mikrostrukturne veličine, dovodi do proširenja lokalizacijske zone i smanjenja vršne vrijednosti oštećenja.



Sl. 4. Usporedba profila oštećenja duž središnje horizontalne osi dobivenih korištenjem predstavljenog modela oštećenja s rezultatima iz literature

Analiza heterogenih materijala provedena je na istom primjeru ploče s dva jednostavna akademska primjera heterogenih materijala čiji su RVE-ovi prikazani na sl. 6. Uz rješenja dobivena za heterogene materijale, na istoj slici prikazana su i rješenja odgovarajućih homogenih materijala za iste unutarnje duljinske skale.



Sl. 6. Usporedba raspodjela oštećenja duž središnje horizontalne osi dobivenih za dva heterogena RVE-a jednakih srednjih radijusa rupa r_{ave} i poroznosti e , ali različitim veličina L

Razlika koja se pojavljuje kod rješenja dobivenog korištenjem manjeg RVE-a u odnosu na pripadno homogeno rješenje najvjerojatnije je posljedica njegove nedovoljne statističke reprezentativnosti, ali to je potrebno potkrijepiti dodatnim razmatranjima.

5 ZAKLJUČAK

Predložen je novi računalni postupak za modeliranje kvazi-krhke pojave popuštanja materijala primjenom trokutnih konačnih elemenata C^1 kontinuiteta temeljenih na punoj gradijentnoj teoriji. Model je temeljen na izotropnom zakonu oštećenja kojim se sve krutosti u modelu degradiraju jednakim intenzitetom. Mogućnosti predloženog algoritma pokazane su u simulaciji lokalizacije deformacije na tipičnom testnom primjeru vlačno opterećene ploče sa zonom materijalne nesavršenosti u sredini. Verifikacija izvedenog algoritma izvršena je usporedbom s rezultatima dostupnima iz literature, gdje je isti problem analiziran EFG bezmrežnom metodom. Uz analizu homogenih materijala s analitički izračunatim krutostima, u obzir su uzeti i heterogeni materijali gdje je za dobivanje potrebnih matrica krutosti korištena računalna homogenizacija drugog reda. U slučaju heterogenih materijala korištena su dva različita RVE-a, a rješenja tako postavljene analize popuštanja uspoređena su s rješenjima dobivenima razmatranjem homogenih materijala istih odgovarajućih intenziteta mikrostrukturnih interakcija. Uočena je ovisnost rezultata o veličini RVE-a te o broju i razmještaju rupa unutar RVE-a. Detaljnije pojašnjenje utjecaja heterogenosti na pojavu oštećenja zahtijeva dodatna proučavanja, što će biti uključeno u budućem istraživanju.

Financijska potpora

Rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom „MNumMacroNano“ (2516).

Literatura:

- [1] R. de Borst, L.J. Sluys, H.B. Mühlhaus, J. Pamin, Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation, *Eng. Comput.*, Vol. 10, 1993, str. 99-121.
- [2] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, 1968, str. 109-124.
- [3] V.G. Kouznetsova, M.G.D. Geers, W.A.M. Brekelmans, Size of a representative volume element in a second-order computational homogenization framework, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, Vol. 2, No 4., 2004, 575-598.
- [4] R.H.J. Peerlings, *Enhanced damage modeling for fracture and fatigue*, Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1999.
- [5] R.H.J. Peerlings, *Enhanced damage modeling for fracture and fatigue*, Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1999.
- [6] Y. Yang, A. Misra, Higher-Order Stress-Strain Theory for Damage Modeling Implemented in an Element-free Galerkin Formulation, *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 64, 2011, str. 1-36.

Autori:

Filip Putar, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, tel. ++385 1 6168 115, fax. ++385 1 6168 187, e-mail: filip.putar@fsb.hr, web stranica: <https://www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/>
Jurica Sorić, tel. ++385 1 6168 103, e-mail: jurica.soric@fsb.hr
Tomislav Lesičar, tel. ++385 1 6168 178, e-mail: tomilsav.lesicar@fsb.hr
Zdenko Tonković, tel. ++385 1 6168 450, e-mail: zsenko.tonkovic@fsb.hr