

PRIMJENA METODE HARMONIJSKE RAVNOTEŽE ZA SIMULACIJE TURBOSTROJEVA

Cvijetić, G., Jasak, H.

Sažetak: U ovom radu predstavljena je metoda harmonijske ravnoteže za računalne simulacije nestlačivog turbulentnog periodičnog strujanja fluida. Pretpostavka o vremenski periodičnom toku omogućuje formiranje $2n + 1$ spregnutih stacionarnih problema koristeći razvoj u Fourierov red. Metoda je implementirana i validirana u programu OpenFOAM, te je ovdje prikazana nadogradnja metode za strujanje u turbostrojovima. Ovisno o broju stupnjeva i lopatica po stupnju, javlja se više frekvencija periodičnih pojava koje su različite od frekvencije vrtnje rotora. Za validaciju je korištena dvodimenzionalna geometrija ERCOFTAC centrifugalne pumpe koja se sastoji od rotora i statora. Za usporedbu su korišteni visina dobave, moment i korisnost pumpe te kontura tlaka po površini lopatice rotora u različitim vremenskim trenucima. Kod simulacija metodom harmonijske ravnoteže korišteni su jedan i dva harmonika te su rezultati uspoređeni s tranzijentnim rješenjem i stacionarnim rješenjem.

Ključne riječi: metoda harmonijske ravnoteže, fourierov red, periodične pojave.

1 UVOD

Periodično strujanje je uobičajeno u znanstvenoj i industrijskoj praksi, a javlja se kod rotirajućih strojeva, raznih pojava s valovima ili kod problema gdje je periodičnost nametnuta periodičnim rubnim uvjetima. Za rješavanje takvih problema najčešće se koriste tranzijentne simulacije, što ima za posljedicu dugo trajanje izračuna simulacije. Kako bi se dobilo potpuno periodično strujanje kod kojeg nema utjecaja prijelaznih pojava vezanih uz pokretanje simulacije najčešće je potrebno simulirati nekoliko perioda. Metoda harmonijske ravnoteže [6] razvijena je iz potrebe za smanjenjem vremena trajanja simulacije uz zadržavanje tranzijentnih pojava toka.

Za razliku od konvencionalnih stacionarnih metoda simulacija, prednost metode harmonijske ravnoteže je mogućnost prikazivanja tranzijentnih pojava koje proizlaze iz periodičnosti toka, uz dodatni utrošak vremena trajanja simulacije. S druge strane, u odnosu na konvencionalne tranzijentne simulacije, metoda harmonijske ravnoteže nudi znatno kraće trajanje izračuna simulacije [1], uz značajnu razinu tranzijentnih detalja. Iako je metoda prvotno razvijena samo kao periodični rubni uvjet [7], He i Ning [8] su proširili primjenu na rješavanje dvodimenzionalnih Navier-Stokesovih jednadžbi te predstavili prednosti u odnosu na tranzijentne metode. U posljednje vrijeme metoda harmonijske ravnoteže pod velikim je znanstvenim razvojem, tako su Dufour i dr. [2] predstavili simulacije oscilirajućih aeroprofila, a Thomas i dr. [9] oscilirajućeg krila. Ekici i dr. [3] primjenjuju metodu harmonijske ravnoteže za simulacije zahtjevnijih geometrija poput turbina. Pristup s više frekvencija periodičnih pojava primjenjuju Gopinath i dr. [4], te Guedeney i dr. [5] za simulacije turbina s više stupnjeva kod kojih se frekvencija rotora mijenja u svakom stupnju.

U ovom članku predstavljen je matematički model metode harmonijske ravnoteže za rješavanje nestlačivih Navier-Stokesovih jednažbi, a potom i slučaj dvodimenzionalne ERCOFTAC centrifugalne pumpe. Rezultati toka kroz pumpu dobiveni su korištenjem metode harmonijske ravnoteže za jedan i dva harmonika, konvencionalne tranzijentne metode te stacionarne metode. Usporedba rezultata izvršena je procjenom greške visine dobave, korisnosti i momenta u odnosu na tranzijentnu simulaciju. Također, dana je usporedba kontura tlaka po lopatici rotora u različitim vremenskim trenucima. Osim rezultata, predstavljena je i usporedba trajanja simulacija, pri čemu do izražaja dolazi metoda harmonijske ravnoteže. Ukupni pregled metode dan je u zaključku.

2 MATEMATIČKI MODEL

Pregled matematičkog modela metode harmonijske jednažbe dan je u ovom poglavlju. Radi jednostavnosti, prvo će biti izvedena skalarna transportna jednažba u formulaciji metode harmonijske ravnoteže, a potom proširena na jednažbu količine gibanja. Postupkom harmonijske ravnoteže član vremenske derivacije postaje izvorni član koji opisuje tranzijentne pojave, a jednažbe postaju stacionarne. Matematički model predstavljen ovdje primjenjiv je za proizvoljan broj harmonika, a potpuni izvod može se naći u [1].

2.1 Skalarna transportna jednažba

Konveksijsko-difuzijska jednažba za pasivni prijenos skalara Q glasi:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + R = 0, \quad (1)$$

gdje R predstavlja konvekciju, difuziju i izvore ili ponore:

$$R = \nabla \cdot (\mathbf{u}Q) - \nabla \cdot (\gamma \nabla Q) - S_Q, \quad (2)$$

\mathbf{u} je brzina prijenosa, γ difuzivnost. Proširivanjem Q u Fourierov red s n harmonika dobivamo:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{i=1}^n Q_{Si} \sin(i\omega t) + Q_{Ci} \cos(i\omega t). \quad (3)$$

Pisane oznake, Q , označavaju varijable u vremenskoj domeni, dok uspravne oznake, Q , označavaju varijable u frekvencijskoj domeni. Fourierov red za R analogan je onome za Q iz jednažbe (3). Stavimo li jednažbu (3) u transportnu jednažbu, (1), dobivaju se članovi uz sinus i kosinus, te nakon grupiranja članova dobivamo $2n+1$ jednažbu: n za sinusne članove, n za kosinusne i jednu za srednju vrijednost. Prema tome, skalarna transportna jednažba u formi metode harmonijske jednažbe postaje sustav $2n+1$ jednažbi, napisanih u matricnoj formi:

$$\omega \mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0, \quad (4)$$

pri čemu je \mathbf{A} matrica koeficijenata veličine $(2n+1) \times (2n+1)$, \mathbf{Q} i \mathbf{R} su stupčaste matrice koje sadrže Fourierove koeficijente Q_{Si} , Q_{Ci} , R_{Si} , R_{Ci} , a ω je kutna frekvencija.

Kako bi mogli jednostavno prijeći iz vremenske u frekvencijsku domenu, definiramo matrični operator u funkciji diskretne Fourierove transformacije (DFT):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}\mathbf{Q}, \quad (5)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q}, \quad (6)$$

gdje je \mathbf{Q} vektor varijable u $2n+1$ vremenskih trenutaka:

$$\mathbf{Q}^T = [Q_{t_1} \quad Q_{t_2} \quad \dots \quad Q_{t_{2n+1}}], \quad (7)$$

pri čemu t_i označava:

$$t_i = \frac{iT}{2n+1}, \quad \text{za } i = 1 \dots 2n+1. \quad (8)$$

Koristeći DFT matrice \mathbf{E} i \mathbf{E}^{-1} te množenjem jednadžbe (4) s lijeva, dobivamo skalarnu transportnu jednadžbu u vremenskoj domeni, kod koje je član vremenske derivacije zamijenjen izvornim članom:

$$\omega \mathbf{A} \mathbf{E} \mathbf{Q} + \mathbf{E} \mathbf{R} = 0. \quad (9)$$

Dobivena jednadžba predstavlja vremenski spregnuti sustav od $2n+1$ stacionarne jednadžbe. Prošireni oblik skalarnu transportne jednadžbe u formi metode harmonijske ravnoteže može se još zapisati:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} Q_{t_j}) - \nabla \cdot (\nu \nabla Q_{t_j}) - S_{Q_{t_j}} = -\frac{2\omega}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n} P_{i-j} Q_{t_j}, \quad \text{za } j = 1 \dots 2n+1, \quad (10)$$

pritom je P_i :

$$P_i = \sum_{k=1}^n k \sin(ik\omega\Delta t), \quad \text{za } i = 0 \dots 2n+1, \quad (11)$$

$$\Delta t = \frac{T}{2n+1}. \quad (12)$$

2.1 Jednadžba količine gibanja u formi metode harmonijske ravnoteže

Nestlačivo jednofazno strujanje opisano je jednadžbom kontinuiteta i jednadžbom količine gibanja:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (14)$$

gdje je ν kinematička viskoznost, ρ je gustoća fluida, a p predstavlja polje tlaka. Izvod jednadžbe količine gibanja analogan je prikazanom izvodu skalarnu transportne

jednadžbe, te će ovdje biti dani samo konačni izrazi. Budući da jednadžba kontinuiteta ne sadrži član vremenske derivacije, jednadžba kontinuiteta ostaje nepromijenjena:

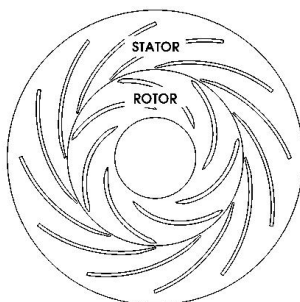
$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{t_j} = 0. \quad (15)$$

Jednadžba količine gibanja u formulaciji metode harmonijske ravnoteže ima oblik:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_{t_j} \mathbf{u}_{t_j}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}_{t_j}) = -\nabla p_{t_j} - \frac{2\omega}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n} P_{i-j} \mathbf{u}_{t_i}, \quad \text{za } j=1 \dots 2n+1. \quad (16)$$

2 REZULTATI

U ovom poglavlju bit će predstavljeni rezultati metode harmonijske ravnoteže te usporedba s konvencionalnim tranzijentnim i stacionarnim simulacijama. Simulacije su provedene na dvodimenzionalnoj geometriji ERCOFTAC centrifugalne pumpe koja se sastoji od rotora i statora, slika 1. Brzina vrtnje rotora iznosi 2000 o/min, a ulazna brzina fluida iznosi 11.4 m/s. Turbulencija je modelirana k-Epsilon modelom.

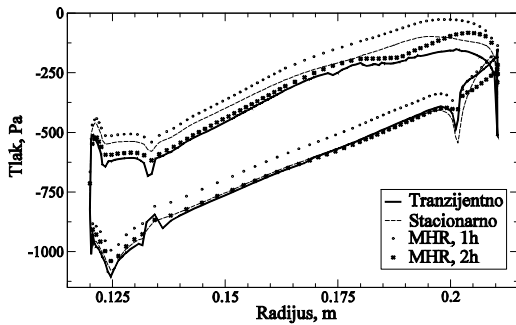


Sl. 1. Geometrija ERCOFTAC centrifugalne pumpe

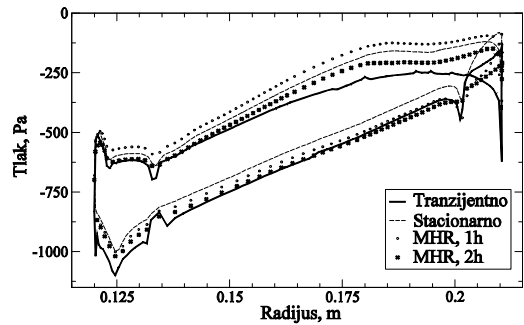
Pumpa je simulirana koristeći stacionarnu metodu, tranzijentnu, te metodu harmonijske ravnoteže kao kvazi-stacionarnu. Kod simulacija metodom harmonijske ravnoteže korišteni su jedan i dva harmonika te je prikazana konvergencija prema tranzijentnom rješenju s porastom broja harmonika. Budući da su u rotoru i statoru različite frekvencije periodičnih pojava, koristi se metoda harmonijske ravnoteže s dvije frekvencije. Frekvencija rotora odgovara frekvenciji koja proizlazi iz brzine vrtnje, a iznosi 33,33 Hz. Frekvencija kojom tok u rotoru utječe na stator ovisi o brzini vrtnje te broju rotorskih lopatica. Tako je uz 7 rotorskih lopatica frekvencija periodične pojave u statoru jednaka 233,33 Hz.

U nastavku su prikazane konture tlaka po lopatici rotora u vremenskim trenucima $t=T/3$, slika 2, u trenutku $t=2T/3$, slika 3, te u trenutku $t=T$, slika 4. Rezultati dobiveni metodom harmonijske ravnoteže za dva harmonika bolje se poklapaju s tranzijentnim rješenjem od rezultata dobivenih korištenjem samo jednog harmonika.

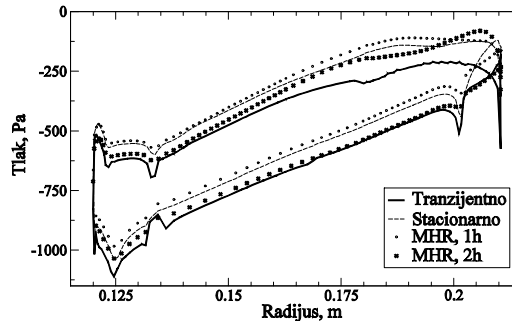
Tablica 1 prikazuje usporedbu globalnih karakteristika pumpe: visinu dobave, korisnost i moment za sve tri metode simulacije u tri vremenska trenutka. Za metodu harmonijske ravnoteže najveće odstupanje svih karakteristika iznosi 4,36%, što je značajan pokazatelj mogućnosti i točnosti metode.



Sl. 2. Kontura tlaka u trenutku $t=T/3$



Sl. 3. Kontura tlaka u trenutku $t=2T/3$



Sl. 4. Kontura tlaka u trenutku $t=T$

	Tranz.	Stac.	Greška, %	MHR, 1h	Greška, %	MHR, 2h	Greška, %	
t ₁	Korisnost	89,72	89,65	0,01	93,55	4,26	90,07	0,39
	Visina dobave	81,48	84,12	3,24	83,37	2,32	83,04	1,92
	Moment	0,0297	0,0307	3,26	0,0305	2,65	0,0303	2,03
t ₂	Korisnost	89,92	89,65	0,3	92,07	2,38	93,85	4,36
	Visina dobave	81,48	84,12	3,24	83,45	2,41	83,13	2,02
	Moment	0,0296	0,0307	3,58	0,0304	2,64	0,0303	2,28
t ₃	Korisnost	89,83	89,65	0,2	89,63	0,22	91,68	2,07
	Visina dobave	81,49	84,12	3,23	83,09	1,96	82,94	1,77
	Moment	0,0297	0,0307	3,37	0,0304	2,65	0,0303	2,28

Tablica 1. Usporedba globalnih parametara pumpe

Sve predstavljene simulacije izrađene su koristeći četiri jezgre na računalu s Intel Core i5-3570K, 3,4 GHz procesorom. Postignuto je značajno smanjenje vremena trajanja izračuna simulacije kod metode harmonijske ravnoteže u odnosu na tranzijentnu simulaciju. Izračun jednog perioda tranzijentne simulacije trajao je ~5 sati računalnog vremena, dok je izračun metodom harmonijske ravnoteže s jednim harmonikom trajao ~52 minute i otprilike 3000 iteracija. Izračun simulacije metodom harmonijske ravnoteže s dva harmonika trajao je ~78 minuta, uz konvergenciju unutar otprilike 2400 iteracija. Potrebno je naglasiti kako jedan period tranzijentne simulacije ne predstavlja reprezentativno rješenje, već je ovisno o problemu potrebno izračunati više perioda. Za slučaj ERCOFTAC centrifugalne pumpe rješenje je postalo potpuno periodično nakon 6 perioda što zahtjeva 30 sati računalnog vremena. U skladu s

navedenim, simulacija metodom harmonijske ravnoteže s jednim harmonikom predstavlja ubrzanje izračuna simulacije 34 puta u odnosu na tranzijentnu simulaciju.

2 ZAKLJUČAK

Metoda harmonijske ravnoteže za nelinearno nestlačivo periodično strujanje u turbostrojevima predstavljena je u ovom radu. Usporedba kontura tlaka na rotorskoj lopatici pokazuje da metoda harmonijske ravnoteže ima potencijal razriješiti tranzijentno polje strujanja i kod problema s više frekvencija. Dodatna usporedba karakteristika pumpe, pri čemu su sva odstupanja metode harmonijske ravnoteže od tranzijentne simulacije manja od 5% upućuje na mogućnost korištenja metode harmonijske ravnoteže kao dio konstrukcijskog postupka uz detaljno predviđanje toka i značajnu uštedu računalnog vremena.

Literatura:

- [1] Cvijetić, G., Jasak, H., Vukčević, V., Finite volume implementation of harmonic balance method for periodic non-linear flows, *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2016.
- [2] Dufour, G., Sicot, F., Puigt, G., Liauzun, C., Contrasting the harmonic balance and linearized methods for oscillating-flap simulations, *AIAA Journal*, Vol. 48, No. 4., 2010.
- [3] Ekici, K., Thomas, J.P., Hall, K.C., Voytovych, D.M., Frequency domain techniques for complex and non-linear flows in turbomachinery, *33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, 2003.
- [4] Gopinath, A., Weide, E., Alonso, J.J., Jameson, A., Ekici, K., Hall, K.C., Three-dimensional unsteady multi-stage turbomachinery simulations using the harmonic balance technique, *Collection of Technical Papers – 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2007.
- [5] Guédeney, T., Gomar, A., Sicot, F., Multi-frequential harmonic balance approach for the computation of unsteadiness in multi-stage turbomachines, *21^{ème} Congrès Français de Mécanique, Bordeaux*, 2013.
- [6] Hall, K.C., Thomas, J.P., Clark, W.S., Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique, *AIAA Journal*, Vol. 50., No. 5., 2002., str. 879-886
- [7] He, L., Method of simulating unsteady turbomachinery flows with multiple perturbations, *AIAA Journal*, Vol. 30., No. 11., 1992., str. 2730-2735.
- [8] He, L., Ning, W., Efficient approach for analysis of unsteady viscous flows in turbomachines, *AIAA Journal*, Vol. 36., No. 11., 1998., str. 2005-2012.
- [9] Thomas, J.P., Custer, C.H., Dowell, E.H., Hall, K.C., Unsteady flow computation using a harmonic balance approach implemented about the OVERFLOW 2 flow solver, *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2009.

Autori:

Gregor Cvijetić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, e-mail: gregor.cvijetic@gmail.com

Hrvoje Jasak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, e-mail: hrvoje.jasak@fsb.hr